به نام خدا

گروه مهندسی ME2CH

رمز گذاشته شده برای همه ی فایل های رمز دار

WWW.ME2CH.COM

منبع این کتاب:

WWW.ME2CH.ROZBLOG.COM & @ME2CH

محاسبه تغییر شکلها در سازه های معین:
روش تیر مزدوج

تهیه کننده: مهندس احمدرضا جعفری

مراحل کار در روش تیر مزدوج:

1- رسم دیاگرام لنگر و سپس M/EI برای تیر اصلی

2- رسم تیر مزدوج تیر اصلی

3- اعمال نمودار M/EI تیر اصلی به تیر مزدوج به صورت بار گسترده

4- رسم دیاگرامهای برش و لنگر برای تیر مزدوج با بار گسترده M/EI

* نمودار برش برای تیر مزدوج نشاندهنده نمودار شیب تیر اصلی است
* نمودار لنگر خمشی تیر مزدوج نشان دهنده نمودار خیز تیر اصلی است

نکات دیگر در زمینه روش تیر مزدوج:

-مزدوج مزدوج یک تیر همان تیر اصلی خواهد بود

-مزدوج یک تیر معین خود معین است

-مزدوج یک تیر نامعین یک تیر ناپایدار است که البته برای آن شرایط بارگذاری خاص دارای تعادل استاتیکی است.

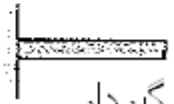
-مزدوج یک تیر ناپایدار یک تیر نامعین است

-اگر مقدار M/EI مثبت باشد ، جهت بار وارد بر تیر مزدوج رو به بالا در نظر گرفته میشود و بالعکس اگر M/EI منفی باشد جهت بار بر روی تیر مزدوج رو به پایین است.

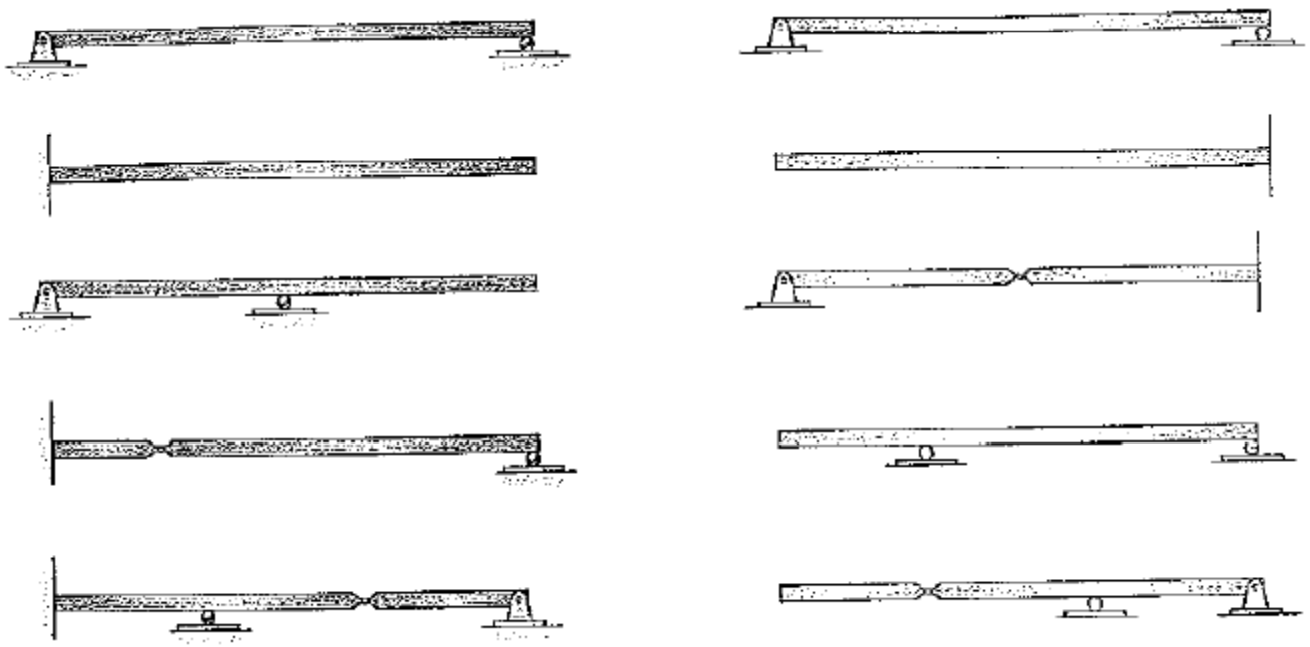
-روش تیر مزدوج تنها برای تیرها قابل استفاده است و برای قابها قابل استفاده نیست

روش رسم تیر مزدوج تیر اصلی

در تعیین مزدوج تیر تغییرات زیر باید در تکیه گاههای تیر اصلی داده شود.

	تیر واقعی	تیر مجازی
1)	$\Delta = 0$ مفصل انتهایی	V $M = 0$ مفصل انتهایی
2)	$\Delta = 0$ غلطک انتهایی	V $M = 0$ غلطک انتهایی
3)	$\theta = 0$ $\Delta = 0$ تکیه گاه گیردار	$V = 0$ $M = 0$ انتهای آزاد
4)	Δ انتهای آزاد	V M  تکیه گاه گیردار
5)	$\Delta = 0$ تکیه گاه مفصلی میانی	V $M = 0$ مفصل داخلی
6)	تکیه گاه غلطکی میانی	V $M = 0$ مفصل داخلی
7)	Δ مفصل داخلی	V M تکیه گاه غلطکی میانی

نمونه هایی از رسم تیر مزدوج



قرارداد علامتها:

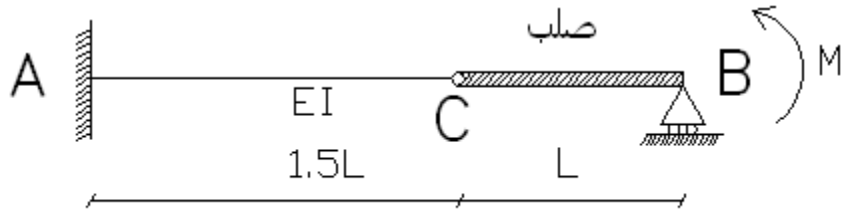
-برش مثبت در تیر مجازی : چرخش پادساعتگرد در تیر اصلی

-برش منفی در تیر مجازی : چرخش ساعتگرد در تیر اصلی

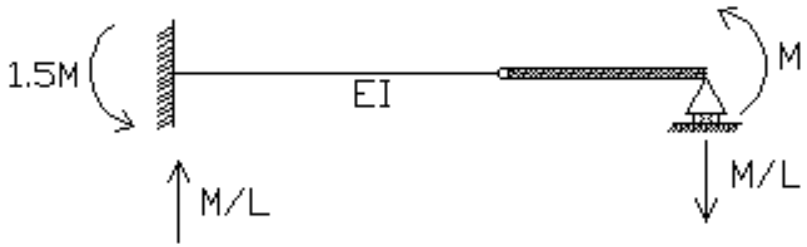
-خمش مثبت (ساعتگرد) در تیر مجازی : خیز رو به بالا (مثبت) در تیر اصلی

-خمشی منفی (پادساعتگرد) در تیر مجازی : خیز رو به پایین (منفی) در تیر اصلی

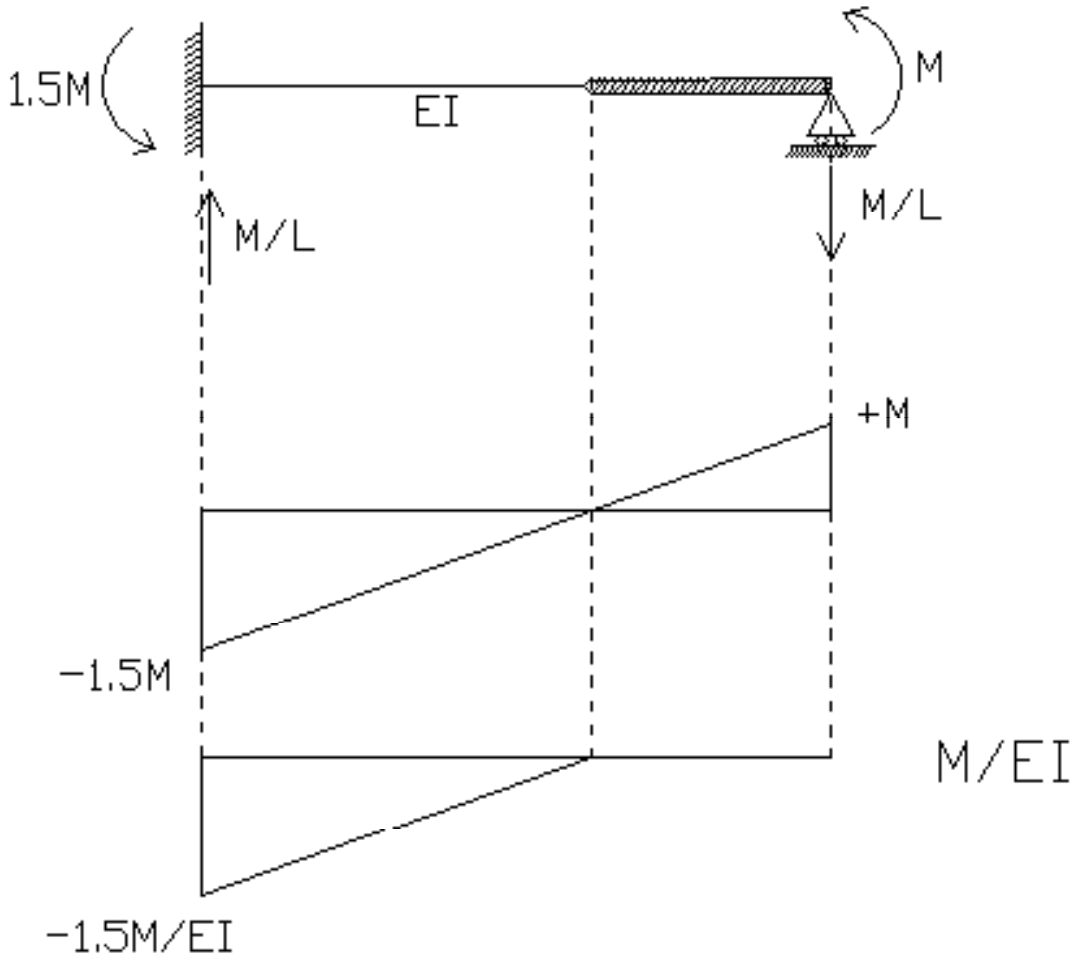
مثال) در تیر شکل زیر چرخش نقطه B را بدست آورید



واکنشهای تکیه گاهی تیر اصلی پس از نوشتن معادلات تعادل:

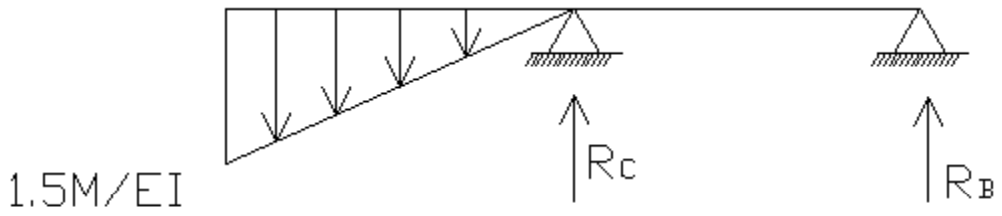


نمودارهای M و M/EI برای تیر اصلی : (برای قطعه صلب M/EI صفر است)



تیر مجازی به همراه بار گسترده M/EI :

(چون خمش منفی است جهت بار گسترده رو به پایین است)



شیب نقطه B در تیر اصلی همان برش در نقطه B در تیر مجازی است.

برش در تیر مجازی با توجه به شکل همان واکنش تکیه گاه B (البته با علامت مخالف) میباشد

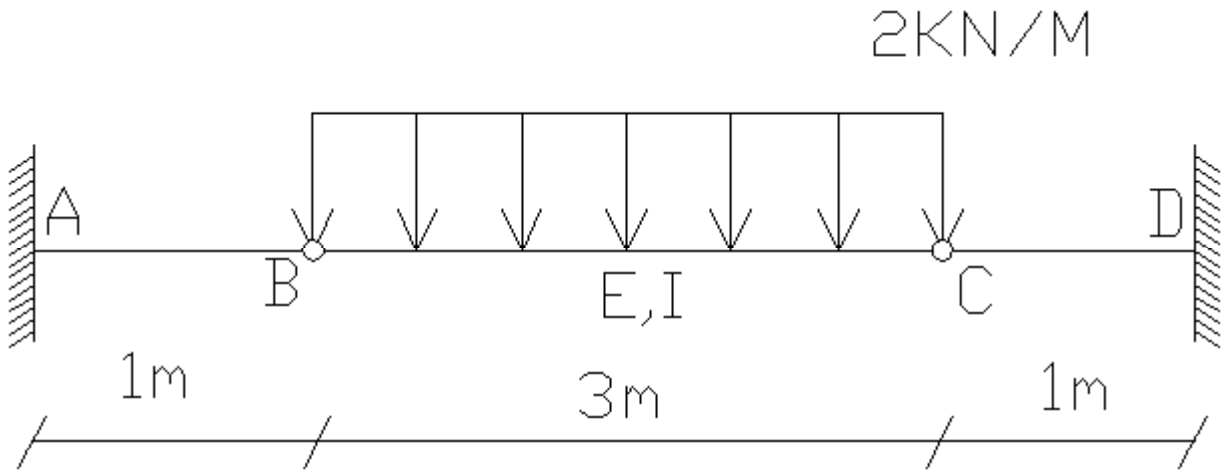
پس کافی است که در تیر مجازی واکنش تکیه گاه B محاسبه شود:

$$\sum M_C = 0 \rightarrow \left[\frac{1.5M}{EI} \times \frac{1.5L}{2}\right] \times \left[\frac{2}{3} \times 1.5L\right] + R_B \times L = 0$$

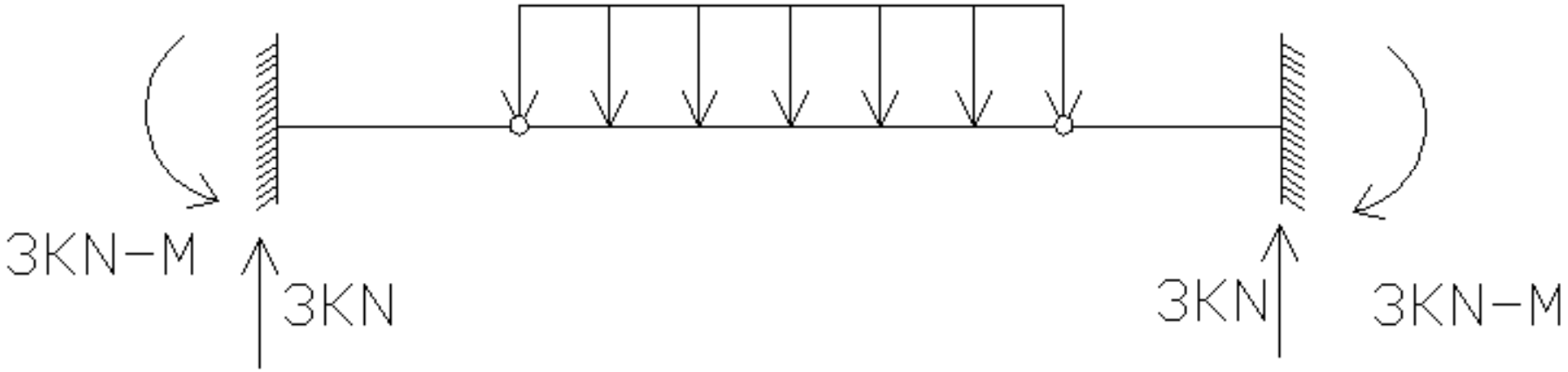
$$\rightarrow R_B = \frac{-9ML}{8EI} \rightarrow V_B = \frac{9ML}{8EI}$$

چون مقدار به دست آمده مثبت است ، طبق قرارداد چرخش نقطه B پادساعتگرد است

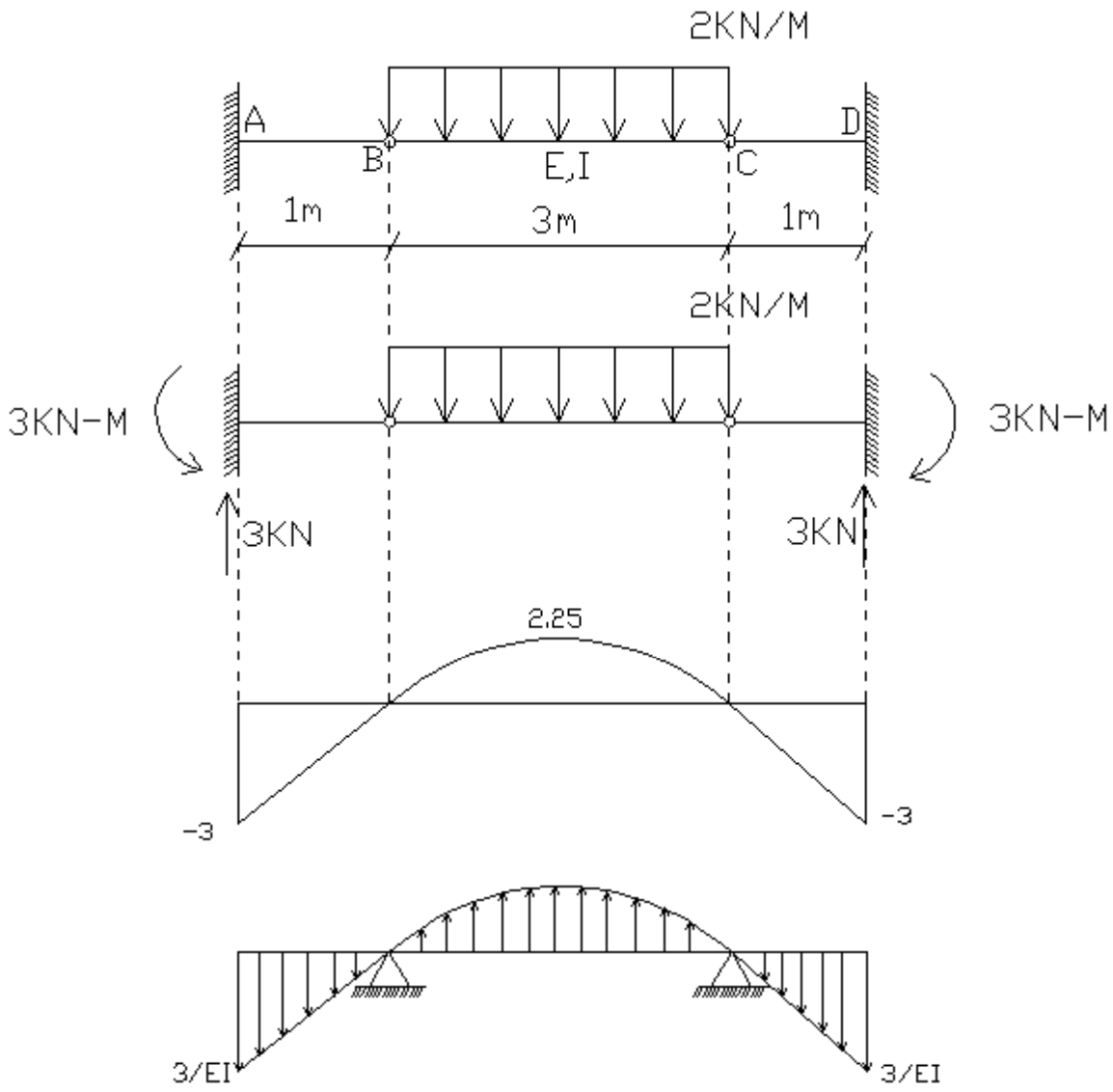
مثال) در تیر شکل زیر خیز نقطه C را به دست آورید



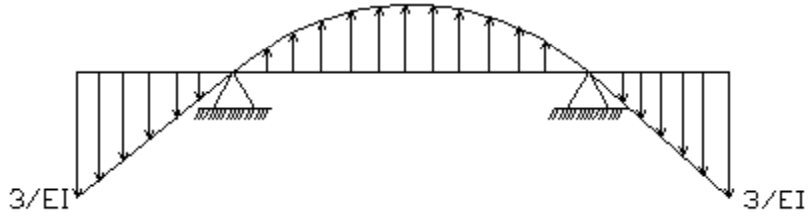
واکنشهای تکیه گاهی تیر بعد از نوشتن معادلات تعادل:



تیر به همراه نمودار M و تیر مجازی با بار گسترده M/EI



برای خیز نقطه C باید مقدار لنگر در تیر مجازی را برای این نقطه به دست آورد

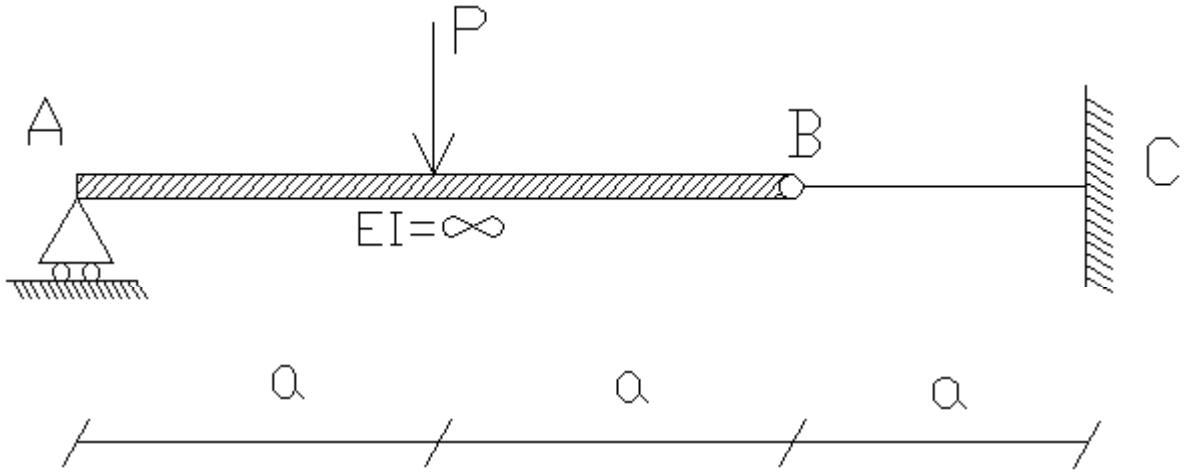


برای محاسبه لنگر در این نقطه راحتتر است که از سمت راست این کار را بکنیم
ولی در این حالت لنگر پادساعتگرد مثبت فرض میشود

$$M_C = -\left(\frac{3}{EI} \times 1 \times \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times 1 = \frac{-1}{EI}$$

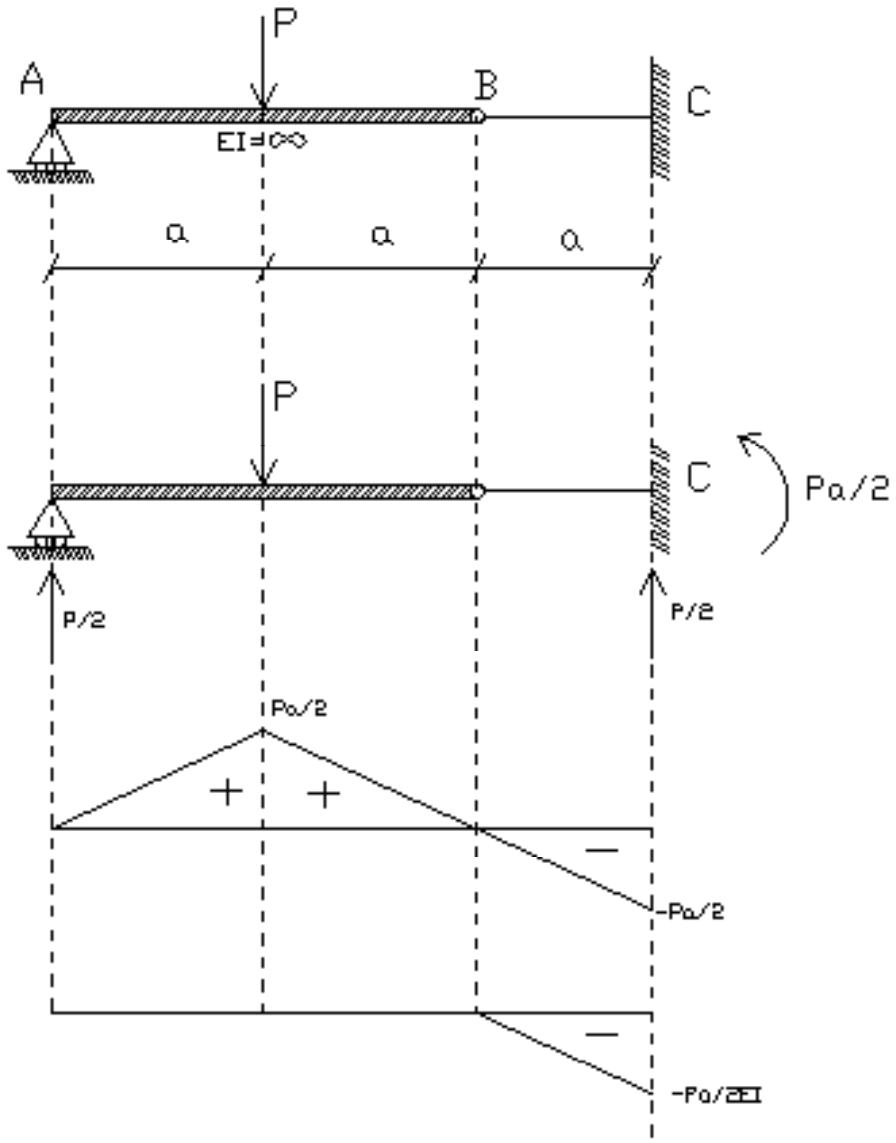
چون مقدار به دست آمده منفی است ، پس خیز این نقطه در تیر اصلی رو به پایین است

مثال) در تیر شکل زیر اختلاف شیب دو طرف مفصل داخلي B چقدر است؟

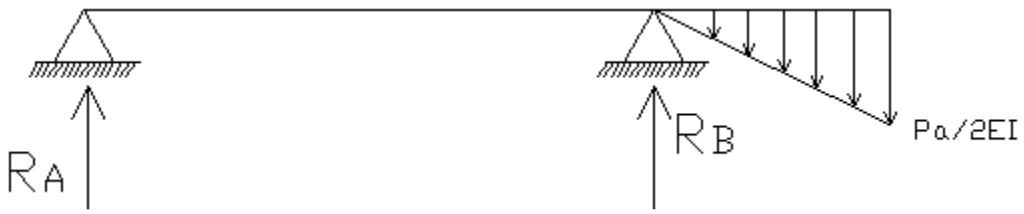


اختلاف دوران دو سمت مفصل داخلی B در تیر اصلی برابر اختلاف برش دو سمت این نقطه در تیر مجازی است

تیر به همراه واکنشهای تکیه گاهی (پس از محاسبه) ، نمودار M و M/EI :



تیر مزدوج به همراه بار گسترده M/EI :



اختلاف برش دو سمت نقطه B برابر واکنش تکیه گاه B است

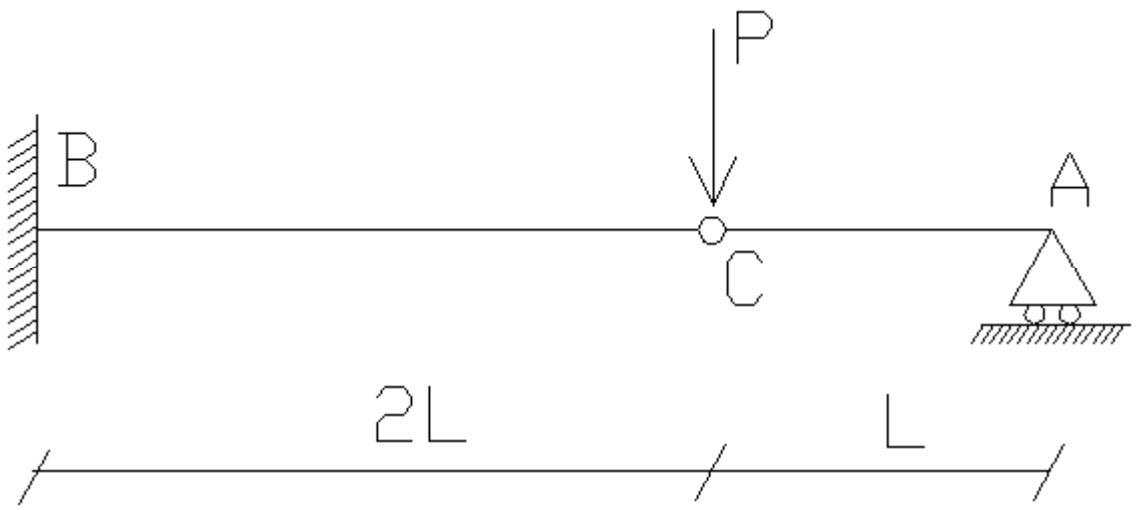
محاسبه واکنش تکیه گاه B :

$$\sum MA = 0 \Rightarrow +RB \times 2a - (\frac{pa}{2EI} \times a \times \frac{1}{2}$$

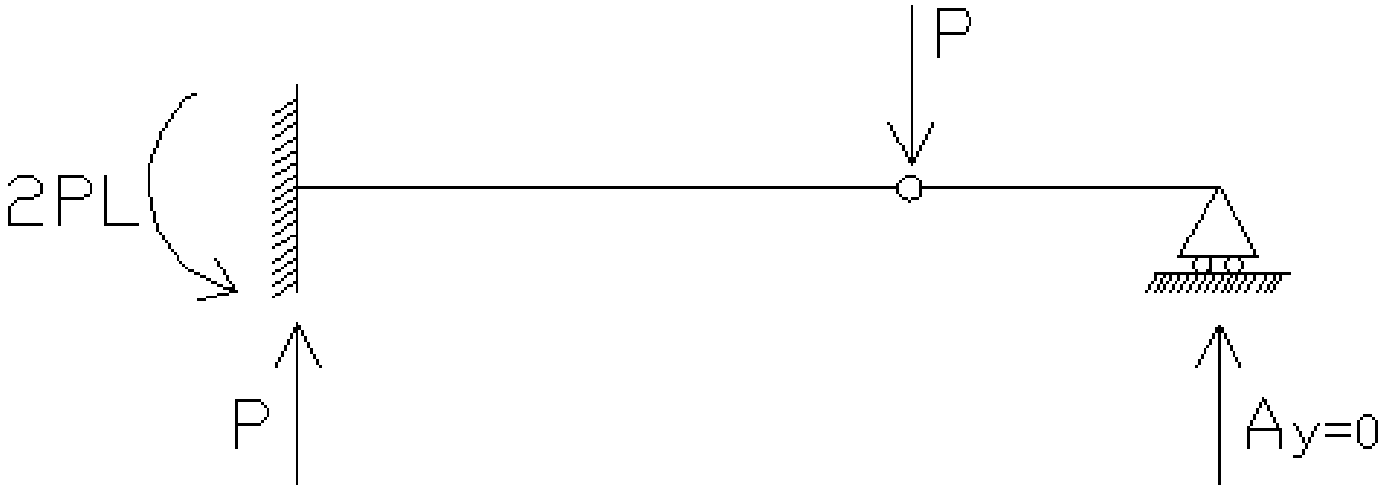
$$(2a + \frac{2a}{3}) = 0$$

$$2RB.a - \frac{2pa^3}{3EI} = 0 \Rightarrow RB = \frac{Pa^2}{3EI}$$

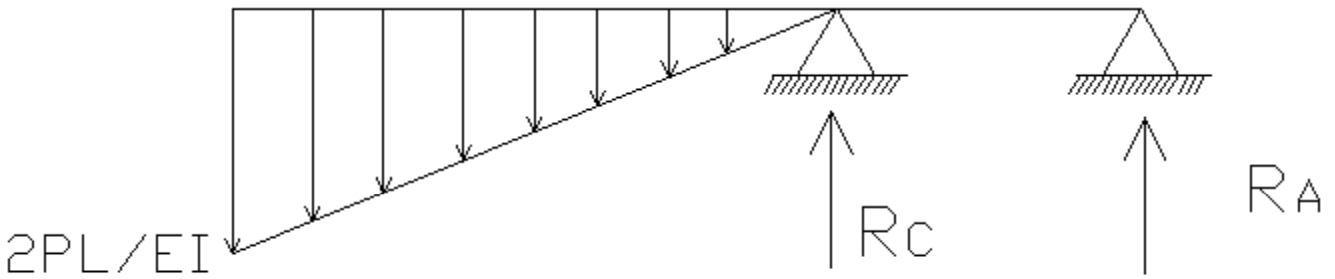
مثال: در سازه شکل زیر چرخش A چقدر است؟



واکنشهای تکیه گاهی پس از نوشتن معادلات تعادل :



تیر مزدوج به همراه بار گسترده M/EI :



برای چرخش A در تیر اصلی باید برش A در تیر مزدوج را به دست آوریم
برش A در تیر مزدوج برابر واکنش تکیه گاه A البته با جهت معکوس است.

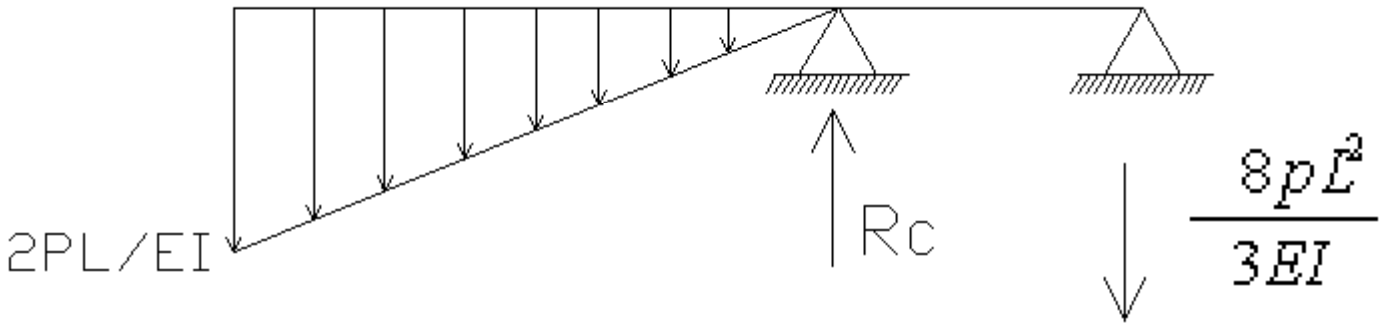
$$\sum MC = 0 \Rightarrow R_A.L + \left[\frac{2Pl}{EI} \times 2L \times \frac{1}{2}\right] \times (\frac{2}{3} \times 2L) = 0$$

$$R_A.L + \frac{8PL^3}{3EI} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{-8PL^2}{3EI}$$

$$R_A = 8\frac{pL^2}{3EI} \downarrow \qquad V_A = \frac{8pL^2}{3EI} \qquad \theta_A = \frac{8pL^2}{3EI}$$

مثال) در مثال قبل مطلوب است محاسبه خیز نقطه C:

خیز نقطه C در تیر اصلی ، خمش در تیر مزدوج در این نقطه است.



از سمت راست حول C گشتاور میگیریم: (در این حالت قرارداد جهت مثبت عوش میشود)

$$MC = \frac{-8pL^2}{3EI} \times L = \frac{-8pL^3}{3EI}$$

$$\delta_C = \frac{-8pL^3}{3EI}$$

چون گشتاور به دست آمده منفی است ، پس خیز نیز رو به پایین و منفی است

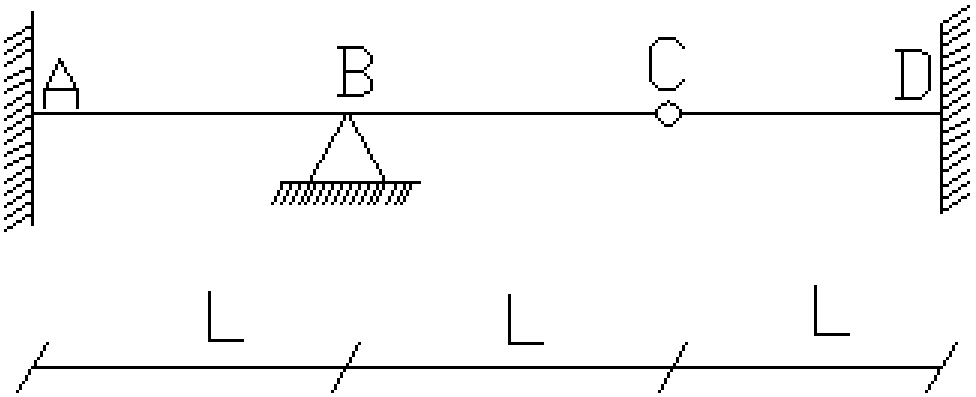
مثال) در تير ABCD شكل زير چنانچه بر اثر نوعی بارگذاري لنگر خمشي در دهانه هاي مختلف به شرح زير باشد مطلوب است محاسبه خيز در نقطه C

$$MAB = 2L - 6X$$

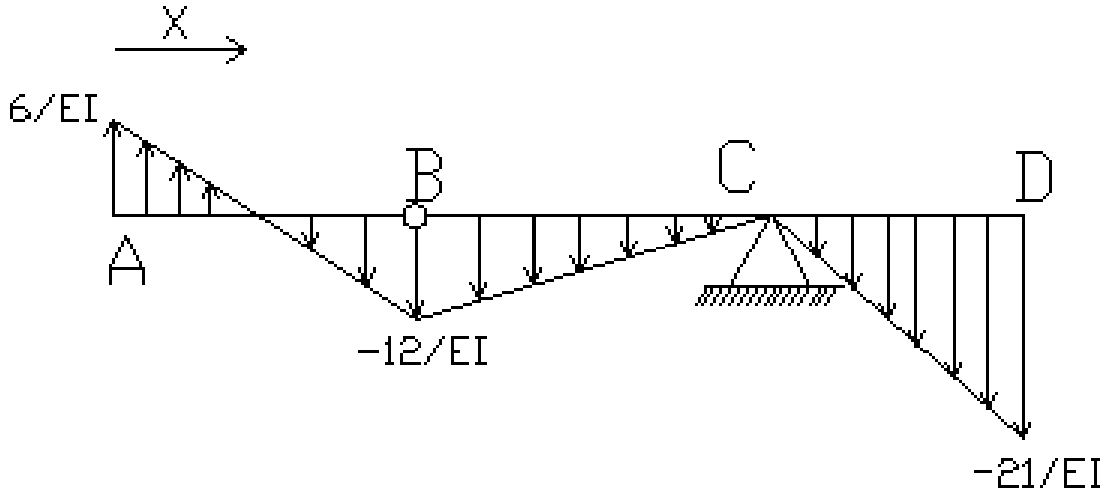
$$MBC = 4X - 8L$$

$$MCD = -7X + 14L$$

$$L = 3m, EI = 300t.m^2$$

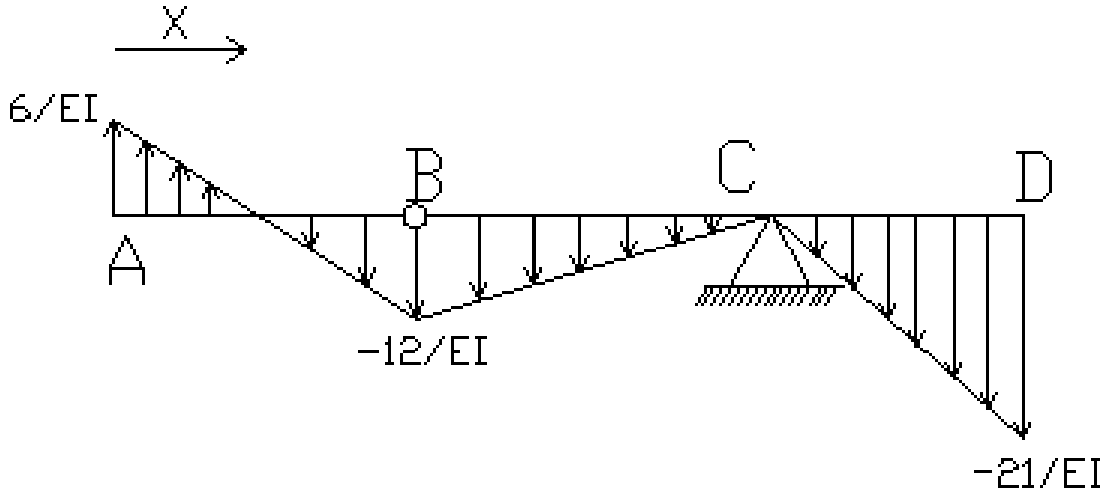


با توجه به شکل تیر اصلی و معادلات لنگر داده شده ، تیر مجازی به همراه بار گسترده M/EI به صورت زیر خواهد بود:



تغییر مکان قائم نقطه C در تیر اصلی همان خمش در این نقطه در تیر مجازی است.
این لنگر را میتوان از سمت راست حول این نقطه به دست آورد. در این حالت قرارداد جهتها برعکس شده و لنگر پادساعتگرد مثبت فرض میشود

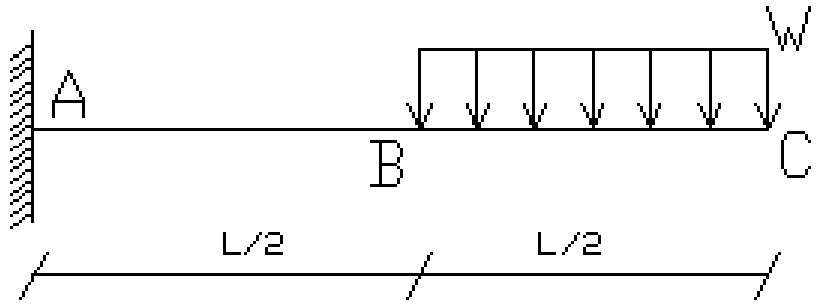
با توجه به شکل تیر اصلی و معادلات لنگر داده شده ، تیر مجازی به همراه بار گسترده M/EI به صورت زیر خواهد بود:



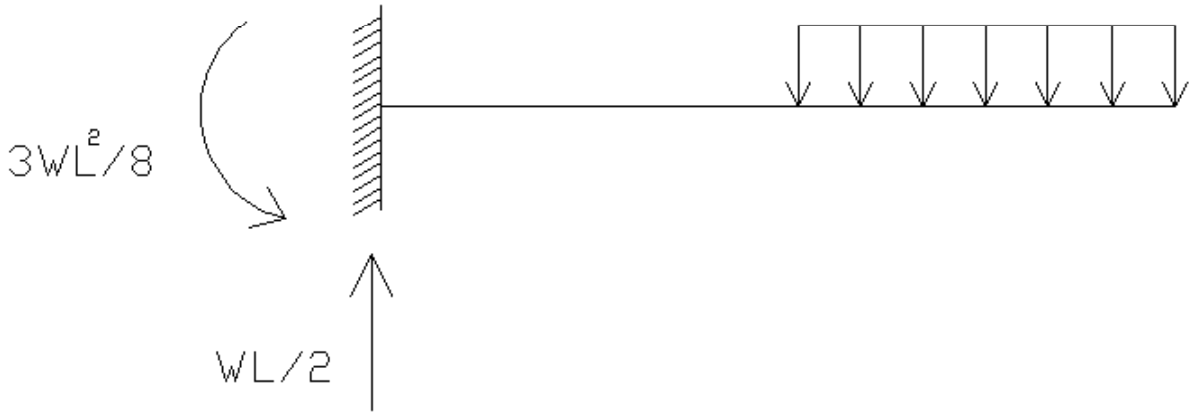
تغییر مکان قائم نقطه C در تیر اصلی همان خمش در این نقطه در تیر مجازی است.
این لنگر را میتوان از سمت راست حول این نقطه به دست آورد. در این حالت قرارداد جهتها برعکس شده و لنگر پادساعتگرد مثبت فرض میشود

$$M_C = -\left[\frac{21}{EI}\times\frac{3}{2}\right]\times\frac{2}{3}\times 3 = -\frac{63}{EI} \rightarrow \delta_C = M_C = -\frac{63}{300} = -0.21m\downarrow$$

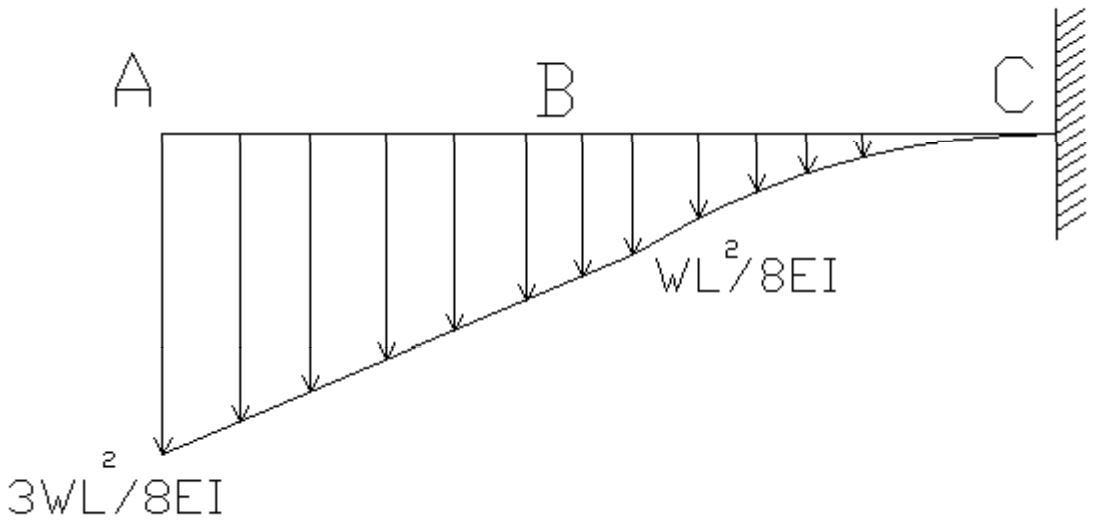
مثال) در تیر شکل زیر خیز در نقطه B را محاسبه کنید.



واکنشهای تکیه گاهی :



تیر مجازی با بار گسترده M/EI :

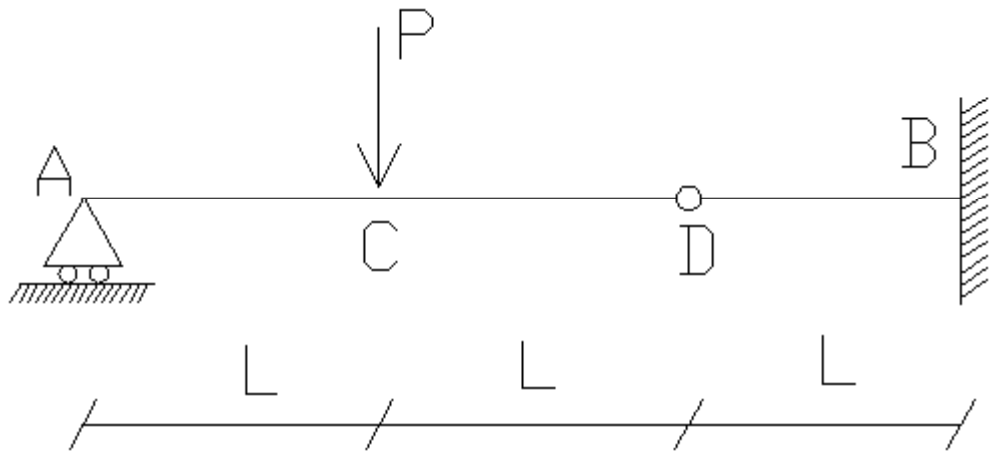


برای خیز نقطه B باید لنگر این نقطه در تیر مجازی محاسبه شود. لنگر را از سمت چپ محاسبه میکنیم:

$$M_B = -\left[\frac{\omega L^2}{8EI}\times\frac{L}{2}\right]\frac{L}{4} - \left[\frac{\omega L^2}{4EI}\times\frac{L}{2}\times\frac{1}{2}\right]\times\frac{2}{3}\frac{L}{2} = -\frac{\omega L^4}{64EI} - \frac{\omega L^4}{48EI} = -\frac{7\omega L^4}{192EI}$$

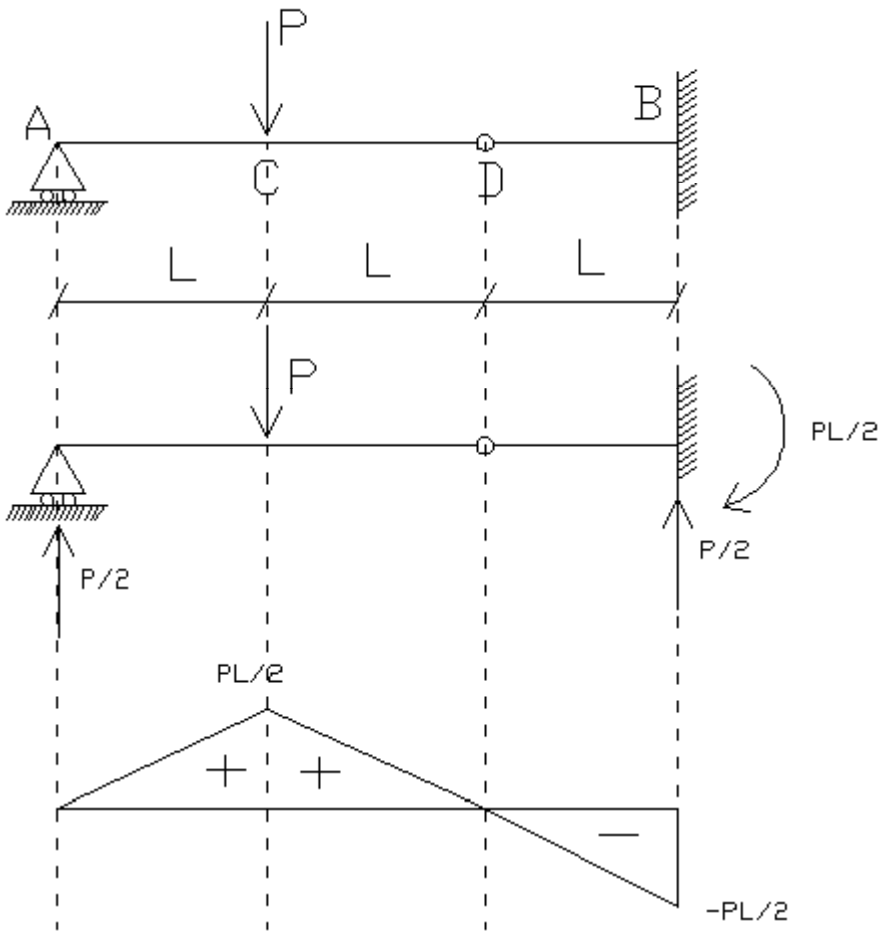
جهت پادساعتگرد منفی در نظر گرفته میشود. چون مقدار به دست آمده منفی است، خیز رو به پایین است

مثال) تغییر مکان محل اثر p در تیر شکل زیر چقدر است؟

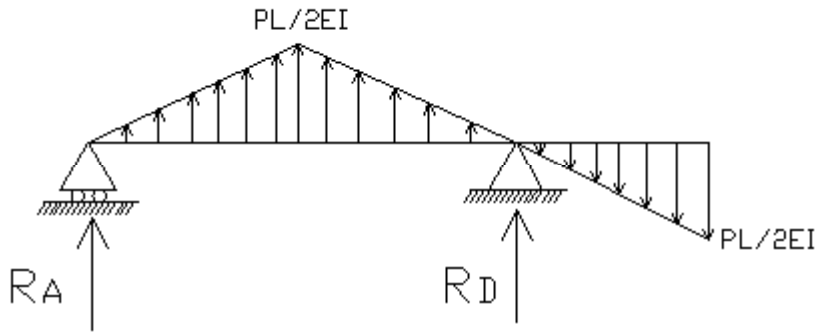


برای این منظور باید در تیر مجازی مقدار خمش در نقطه c را به دست آوریم

تیر به همراه واکنشها و نمودار لنگر



تیر مجازی به همراه بار گسترده M/EI :



ابتدا واکنش تکیه گاه A را محاسبه میکنیم و سپس لنگر نقطه C :

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -R_A \times 2L - \left[\frac{PL}{2EI} \times 2L \times \frac{1}{2}\right] \times L = 0$$

$$-2R_A L - \frac{PL^3}{2EI} = 0 \Rightarrow R_A = -\frac{PL^2}{4EI} \Rightarrow R_A = \frac{PL^2}{4EI} \downarrow$$

$$M_C = -\frac{PL^2}{4EI} \times L + \left[\frac{PL}{2EI} \times L \times \frac{1}{2}\right] \times \frac{L}{3} = -\frac{PL^3}{4EI} + \frac{PL^3}{12\,EI} = -\frac{PL^3}{6EI}$$

چون مقدار به دست آمده منفی است ، پس خیز این نقطه رو به پایین است